Доклады Академии наук СССР
1967. Том 173, № 3

УДК 517.941

МАТЕМАТИКА

А. М. МОЛЧАНОВ

# РАВНОМЕРНАЯ АСИМПТОТИКА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

*(Представлено академиком М. В. Келдышем 17 V 1966)*

Предложен новый способ изучения асимптотики систем линейных уравнений с малым параметром при производной

$$\varepsilon \frac{d\bar{x}}{dt} = A(t, \varepsilon)\bar{x}. \tag{1}$$

Фундаментальная матрица системы представляется в виде

$$S(t, \varepsilon) = W(t, \varepsilon)\Lambda(t, \varepsilon), \tag{2}$$

где матрица $\Lambda$ диагональна, а матрица $W(t, \varepsilon)$ имеет предел при $\varepsilon \to 0$.

Отыскание матрицы $W$ можно свести к вычислению множителей бесконечного правого произведения

$$W = W_0 W_1 \ldots W_n \ldots, \tag{3}$$

причем каждый множитель $W_n$ находится при помощи квадратур, а произведение сходится быстрее числового произведения

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1 + C\varepsilon^{\Phi_n}). \tag{4}$$

Здесь $\Phi_n$ — числа Фибоначчи, растущие как $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$. В частном случае матриц второго порядка скорость сходимости еще выше и достигает скорости сходимости метода Ньютона.

Справедливость высказанных утверждений доказана на любом отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, на котором не пересекаются действительные части собственных значений матрицы $A(t, \varepsilon)$.

1. Матрица $A$ треугольна. Предположим дополнительно, что диагональные элементы матрицы $A$, совпадающие в данном случае с ее собственными числами, расположены в порядке убывания действительных частей

$$\operatorname{Re}\lambda_1(t, \varepsilon) > \operatorname{Re}\lambda_2(t, \varepsilon) > \ldots > \operatorname{Re}\lambda_k(t, \varepsilon). \tag{5}$$

В этом важном частном случае матрица $W$ также треугольна, и ее отыскание сводится к квадратурам.

Выпишем уравнение, которому удовлетворяет матрица $S(t, \varepsilon)$:

$$\varepsilon\, dS / dt = AS, \tag{6}$$

и, подставив (2) в (6), умножим на $\Lambda^{-1}$ справа и на $W^{-1}$ слева. Получим

$$\varepsilon W^{-1}\dot{W} + \varepsilon\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} = W^{-1}AW. \tag{7}$$

Будем искать треугольную матрицу $W$ с единицами по диагонали. Тогда левая часть равенства (7) распадается на две непересекающиеся матрицы. Второе слагаемое имеет ненулевые элементы только на диагонали, а первое — только вне диагонали. Нетрудно показать, что в этом случае одно уравнение (7) однозначно определяет два уравнения для $W$ и $\Lambda$. Введем, однако, предварительно удобные для дальнейшего обозначения. Пусть $z = \| z_{il} \|$ — произвольная матрица. Обозначим через $\mathrm{T}(z)$, $\lambda(z)$, $\perp(z)$ ее нижнюю треугольную, диагональную и верхнюю треугольную части соответственно:

$$\mathrm{T}(z) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 \\ z_{21} & 0 & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots 0 \end{pmatrix}\right), \quad \lambda(z) = \left(\begin{pmatrix} z_{11} & 0 & \cdots 0 \\ 0 & z_{22} & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots z_{nn} \end{pmatrix}\right),$$

$$\perp(z) = \left(\begin{pmatrix} 0 & z_{12} & \cdots z_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots z_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}\right). \tag{8}$$

Выпишем теперь уравнения для $\Lambda$ и $W$:

$$\varepsilon\dot{\Lambda} = \lambda\Lambda, \tag{9}$$

$$\varepsilon\dot{W} = \mathrm{T}W + \lambda W - W\lambda, \tag{10}$$

где $\lambda = \lambda(A)$ и $\mathrm{T} = \mathrm{T}(A)$.

Уравнение (9) интегрируется сразу

$$\Lambda(t, \varepsilon) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau, \varepsilon)\, d\tau\right]. \tag{11}$$

Уравнение (10) при помощи промежуточной подстановки $W = \Lambda U \Lambda^{-1}$ можно записать в виде интегрального уравнения

$$W(t) = E + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t^*}^{t} \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} \lambda(s)\, ds\right] \mathrm{T}(\tau)\, W(\tau) \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t} \lambda(s)\, ds\right] d\tau. \tag{12}$$

Если это уравнение проитерировать $k$ раз, то получится точное решение, так как произведение более чем $k$ треугольных матриц с нулями на диагонали ($k$ — размерность матриц) тождественно равно нулю. Кроме того, прямой проверкой можно убедиться, что все экспоненты, стоящие под знаком интеграла, будут иметь отрицательную действительную часть. Это вытекает (разумеется, после перемножения экспоненциальных множителей) опять-таки из треугольности матриц $\mathrm{T}$, $W$ и упорядоченности (см. (5)) собственных значений матрицы $A$. Поэтому можно положить $t^* = t_0$, и матрица $W(t, \varepsilon)$, определяемая уравнением (12), будет иметь конечный предел при $\varepsilon \to 0$. Этот предел есть решение уравнения

$$\mathrm{T}W + \lambda W - W\lambda = 0, \tag{13}$$

которое получается из (10), если формально положить $\varepsilon = 0$. Уравнение (13) имеет единственное решение среди треугольных (с единицами на диагонали) матриц $W$. Из формулы (12) можно вывести оценку

$$W = E + O(\mathrm{T}),$$

имеющую место при малых $\mathrm{T}$, которая играет в дальнейшем важную роль. При оценке в знаменатель попадают разности собственных чисел (их действительные части) матрицы $A$. Поэтому условие (5) существенно для справедливости оценки.

Замечание. Совершенно аналогично можно разобрать случай, когда матрица $A$ имеет нули ниже диагонали. Нужно только всюду писать $\perp(A)$ вместо $\mathrm{T}(A)$ и в формуле (12) положить $t^* = t_1$.

2. Матрица $A$ почти треугольна. Разберем теперь несколько более общий случай, когда матрица $A$ не точно треугольна, но ее отличие от треугольности невелико. Пусть, например, имеет место оценка:

$$\perp(A) \sim \delta,$$

где $\delta$ — некоторая малая величина.

Опять ищем решение уравнения для фундаментальной матрицы системы в виде произведения матриц:

$$S = P\Sigma, \quad \varepsilon P^{-1}\dot{P} + \varepsilon\dot{\Sigma}\Sigma^{-1} = P^{-1}AP.$$

Возникает произвол в задании уравнения для $P$, и мы используем этот произвол, полагая

$$\varepsilon\dot{P} = \mathrm{T}P + \lambda P - P\lambda.$$

Уравнение для $P$ написано так, как будто матрица $A$ треугольна. Если бы она в самом деле была треугольна, то уравнение для $\Sigma$ дало бы нам диагональную матрицу. Но так как матрица $A$ только почти треугольна, то мы ожидаем, что и для $\Sigma$ получится почти диагональное уравнение. После этого можно надеяться еще улучшить положение, повторив процедуру. Выпишем уравнение для $\Sigma$

$$\varepsilon\dot{\Sigma} = B\Sigma,$$

где $B = P^{-1}\perp(A)P + \lambda(A)$.

Наши ожидания действительно оправдываются, так как теперь не только «верх», но и «низ» матрицы $B$ оказываются порядка $\delta$. Вместе с тем мы видим, что уравнение для $\Sigma$ имеет тот же вид, что исходное уравнение для $S$, но с измененной матрицей $B$. Матрица $B$ лучше, чем $A$, так как хотя верхняя треугольная часть и не уменьшилась, но зато уменьшилась нижняя. Естественно поэтому сделать следующий шаг и исправить верхнюю треугольную часть.

Эти соображения подсказывают целесообразность следующего итерационного процесса. Начинаем с некоторой матрицы $A_n$ и строим последовательно четыре матрицы $P_n, B_n, Q_n, A_{n+1}$:

$P_n$ — решение уравнения

$$\varepsilon\dot{P}_n = \mathrm{T}(A_n)P_n + \lambda(A_n)P_n - P_n\lambda(A_n); \tag{14}$$

$B_n$ — по формуле

$$B_n = P_n^{-1}\perp(A_n)P_n + \lambda(A_n); \tag{15}$$

$Q_n$ — снова решение уравнения

$$\varepsilon\dot{Q}_n = \perp(B_n)Q_n + \lambda(B_n)P_n - P_n\lambda(B_n) \tag{16}$$

и, наконец, $A_{n+1}$ по формуле

$$A_{n+1} = Q_n^{-1}\mathrm{T}(B_n)Q_n + \lambda(B_n). \tag{17}$$

Этот метод похож на альтернирующий метод в конформных отображениях. Здесь мы также уменьшаем то одну, то другую половину матрицы. Заметим, что диагональные элементы все время остаются порядка единицы и в главных членах совпадают с исходными. Посмотрим, чего мы достигли в результате одного такого двойного шага. Оценка получается при использовании формулы

$$P_n = E + O[\mathrm{T}(A_n)].$$

Подставив в (15) и оставляя только главные члены, мы находим, что $B_n \approx \lambda(A_n) + \perp(A_n) + O(\mathrm{T}(A_n)\perp(A_n))$. Следовательно, $\perp(B_n) \sim \sim \perp(A_n)$, $\mathrm{T}(B_n) \sim \perp(A_n)\mathrm{T}(A_n)$.

Совершенно аналогично на следующем полушаге получим $\perp(A_{n+1}) \sim \sim \perp(B_n)\mathrm{T}(B_n)$, $\quad \mathrm{T}(A_{n+1}) \sim \mathrm{T}(B_n)$.

Эти соотношения обеспечивают довольно быструю сходимость, хотя и не такую быструю, как в методе Ньютона, так как ошибка возводится в квадрат не на каждом этапе, а только через один этап. Нетрудно найти скорость убывания недиагональных членов. Пусть

$$\mathrm{T}(A_n) \sim \delta^{p_n}, \quad \perp(A_n) \sim \delta^{q_n};$$

тогда из написанных выше формул находим

$$\mathrm{T}(B_n) \sim \delta^{p_n+q_n}, \quad \perp(B_n) \sim \delta^{q_n}$$

и далее получаем для второй половины шага

$$\mathrm{T}(A_{n+1}) \sim \delta^{p_n+q_n}, \quad \perp(\mathrm{A}_{n+1}) \sim \delta^{p_n+2q_n}.$$

Мы можем, следовательно, написать по индукции

$$p_{n+1} = p_n + q_n, \quad q_{n+1} = p_n + 2q_n;$$

так как при $n = 0$ мы имели $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, то возникающая последовательность, которая дает (как легко видеть) оценку сверху, совпадает с числами Фибоначчи. Более аккуратные выкладки показывают, что для матриц второго порядка получается скорость сходимости точно такая, как в методе Ньютона. Любопытно, что двойка есть первая подходящая дробь для числа $(\sqrt{5} + 1) / 2$, задающего асимптотику чисел Фибоначчи. Возможно, что более аккуратные выкладки дадут для матриц третьего порядка скорость, определяемую третьей (надо брать приближения по избытку) подходящей дробью, для матриц четвертого порядка — пятой и т. д. Однако более подробные оценки проведены не были.

3. Произвольная дифференцируемая матрица $A(t, \varepsilon)$. В этом случае задача легко сводится к задаче предыдущего пункта. Нужно только сделать нестандартный первый шаг в итерационном процессе.

Рассмотрим, в самом деле, исходное уравнение для матрицы $S$ и положим, как обычно, $S = W_0\Sigma$. Для $\Sigma$, как это уже трижды проверялось, получается уравнение того же вида, что для $S$, но с матрицей $B$

$$B = W_0^{-1}AW_0 - \varepsilon W_0^{-1}\dot{W}_0.$$

Выберем теперь матрицу $W_0$ так, чтобы первый, главный, член в выражении для $B$ был треугольным. Всегда существует и даже унитарная матрица $W_0$, которая решает эту задачу. Ее построение осуществляется очень просто. Надо взять систему собственных векторов матрицы $A$ и ортогонализировать ее. Матрица перехода от координатных ортов к полученному ортонормальному базису решает задачу отыскания матрицы $W_0$. Существует ровно $k!$ способов выбрать такую матрицу $W_0$. Однако для наших целей годятся только два. Один, который располагает собственные числа в порядке возрастания их действительных частей, и другой, который располагает их в убывающем порядке.

Следует отметить, что полученная унитарная матрица $W_0(t, \varepsilon)$ будет обладать ограниченной производной только на интервале, где нет пересечения собственных значений. В точках, где матрица $A(t)$ имеет кратные корни, производная $\dot{W}_0$ обращается, вообще говоря, в бесконечность. Это легко проверить, например, для случая точки поворота в уравнении Шредингера.

Поступило
21 IV 1966